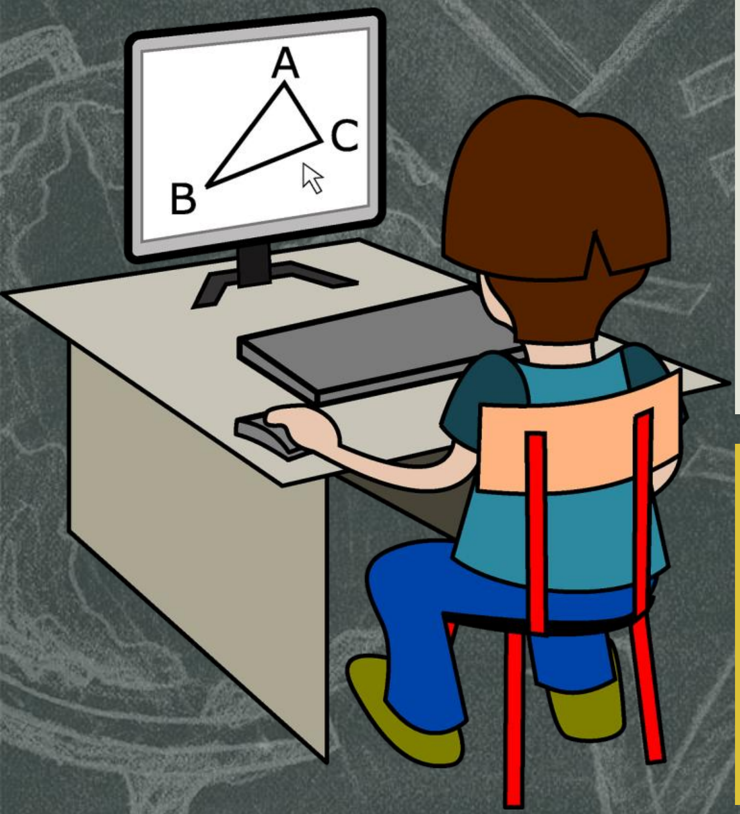
Shkolla e mesme e qytetit të Shkupit
“Saraj” -Shkup

MATEMATIKË

Prof. Shqipe Osmani

Syprina e figurave të rrafshta

Formulat tjera për njehsimin e syprinës së trekëndëshit



1. Njehso syprinën e trekëndëshit nëse brinjët e tij janë a=20 cm, b=13 cm dhe c=21 cm.

Për të njehsuar syprinën e kërkuar duhet në një far mënyre të caktohet të paktën njëra prej lartësive të trekëndëshit ABC.

Le të jetë $CC_1 \perp AB$ dhe $AC_1 = x$. Atëherë $C_1B = c - x$, pra prej trekëndëshit AC_1C vijon:

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \Rightarrow h_c^2 = 13^2 - x^2$$

Ngjajshëm, prej trekëndëshit CC_1B kemi:

$$h_c^2 = a^2 - (c-x)^2, d.m.th. h_c^2 = 20^2 - (21-x)^2$$

Prej dy barazive paraprake fitojmë:

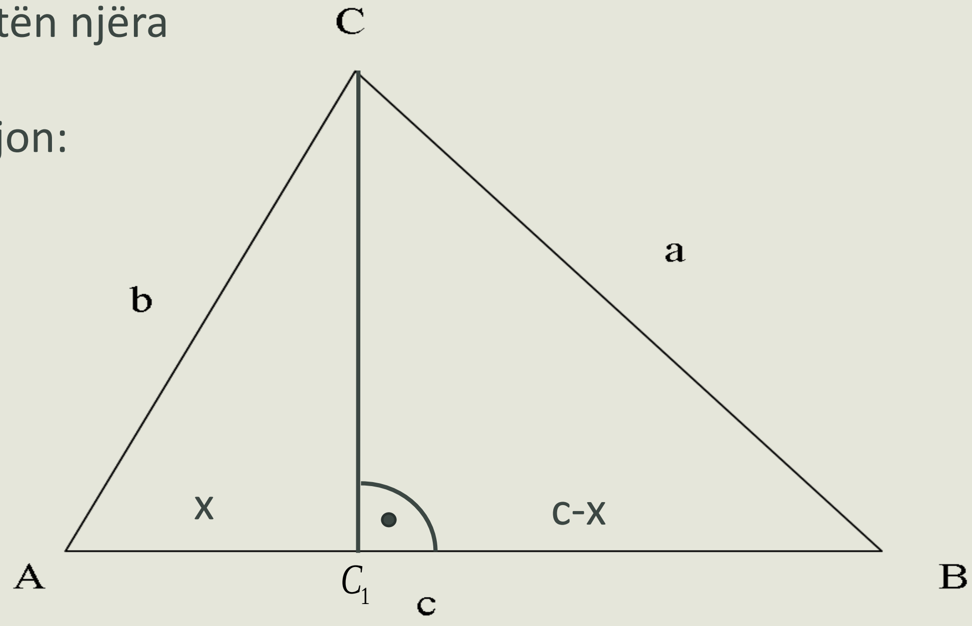
$$13^2 - x^2 = 20^2 - (21-x)^2$$

$$169 - x^2 = 400 - (441 - 42x + x^2)$$

$$42x = 210$$

$$x = 5$$

Pra, $h_c^2 = 13^2 - 5^2, d.m.th., h_c = 12cm$



$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

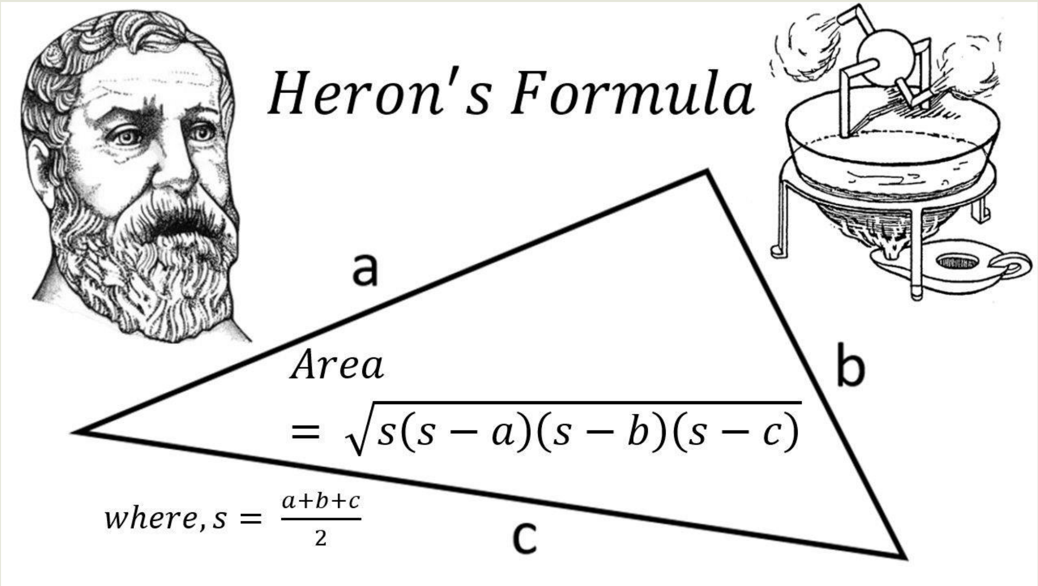
$$S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 12 = 126cm^2$$

Formula e Heronit

Në shkollimin fillor keni zgjedhur detyra të këtilla por ndryshe, e keni zbatuar formulën e Heronit (Heroni është matematicient grek nga Aleksandria, shekulli I p.e.s) e cila thotë:

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ku $s=\dfrac{a+b+c}{2}$



Formula e Heronit

2.Njehso syprinën e trekëndëshit të dhënë duke zbatuar formulën e Heronit.

Vëre nxjrrjen e formulës së Heronit:

- Prej barazive $h_c^2 = b^2 - x^2$ dhe $h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$, vijon

$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$ prej ku $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$, Pra $h_c^2 = b^2 - \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2$

-Me zbatimin e formulës $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, kemi:

$$h_c^2 = \left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$$

$$h_c^2 = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c};$$

$$h_c^2 = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2c} \cdot \frac{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2}{2c};$$

$$h_c^2 = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}, d.m.th.$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)$$

Duke e shfrytëzuar formulën $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ (ku s është gjysma e perimetrit ΔABC), d.m.th, 2s=a+b+c, përcaktojmë:

$$a-b+c = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b),$$

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c = 2(s-c),$$

$$b+c-a = a+b+c-2a = 2s-2a = 2(s-a),\ pra$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2} \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-a) \cdot 2s$$

$$h_c^2 = \frac{1}{c^2} \cdot 4(s-b)(s-c)(s-a) \cdot s$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ dhe

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, d.m.th$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

3. Njehso syprinën e paralelogramit brinjët e të cilit janë $a=13$, $b=14$ cm dhe diagonalja $d_1=15$cm

Diagonalja **AC** e ndan paralelogramin **ABCD** në dy trekëndësha të puthitshëm. Pasi janë dhënë të tre brinjët e trekënëshit ABC, gjysëmperimetri i tij është

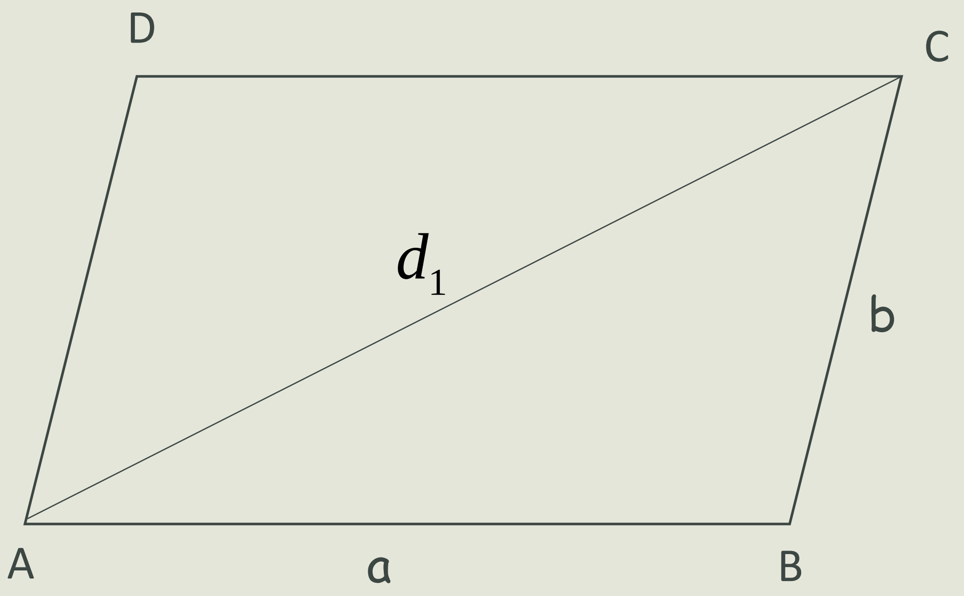
$$s=\frac{a+b+d_1}{2}=\frac{13+14+5}{2}=21,$$

pra sipas formulë së Heronit kemi:

$$S_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$S_{ABC}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)},$$ d.m.th

$$S_{ABC}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3}=\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 2^4}=84cm^2$$



Pra syprina e paralelogramit është

$$S=2\cdot 84=168cm^2$$

Formula e Heronit

Mbaj mend!

Syprina e trekëndëshit nëse janë dhënë brinjët e tij njehsohet me formulën e Heronit $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s=\frac{a+b+c}{2}$

Syprina e trekëndëshit

4. Le të jetë **r** rrezja e vijës rrethore të brendashkruar të trekëndëshi **ABC** me brinjë **a,b** dhe **c**. Cakto syprinën e trekëndëshit të shprehur nëpërmjet elementeve të përmendura.

Vëre zgjidhjen:

rrezja r është lartësija e cdonjërit prej trekëndëshave ABO, BOC dhe AOC.

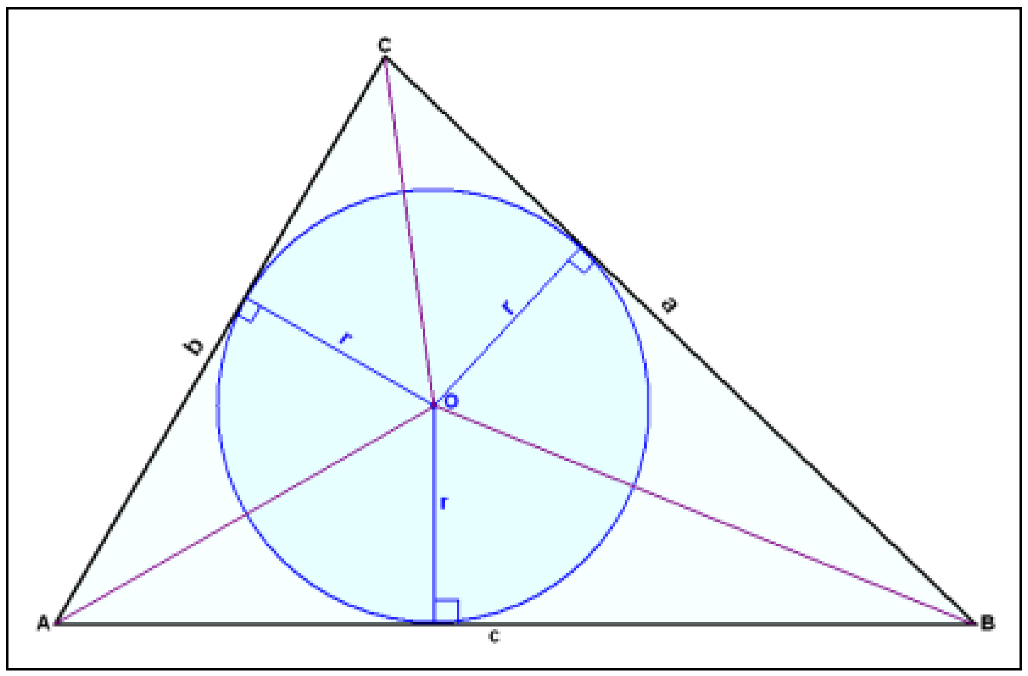
Sipas aksiomës për syprinën e shumëkëndëshit kemi:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BCO} + S_{\Delta CAO}$$

$$S = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2}$$

$$S = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s, \; pasi$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$



Syprina e trekëndëshit

Mbaj mend!

Nëse ***r*** është rreze e vijës rrethore të brendashkruar në trekëndësh me brinjë ***a,b*** dhe **c**, atëherë **S=r·s**, kurse $r=\frac{S}{s}$, ku $s=\frac{a+b+c}{2}$

Nëse trekëndëshi është barabrnjës, atëherë $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

5. Njehso rrezen e vijës rrethore të brendashkruar te trekëndëshi kënddrejt katetat e të cilit janë 8 cm dhe 15 cm.

$$S=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{8\cdot 15}{2}=60cm^2$$

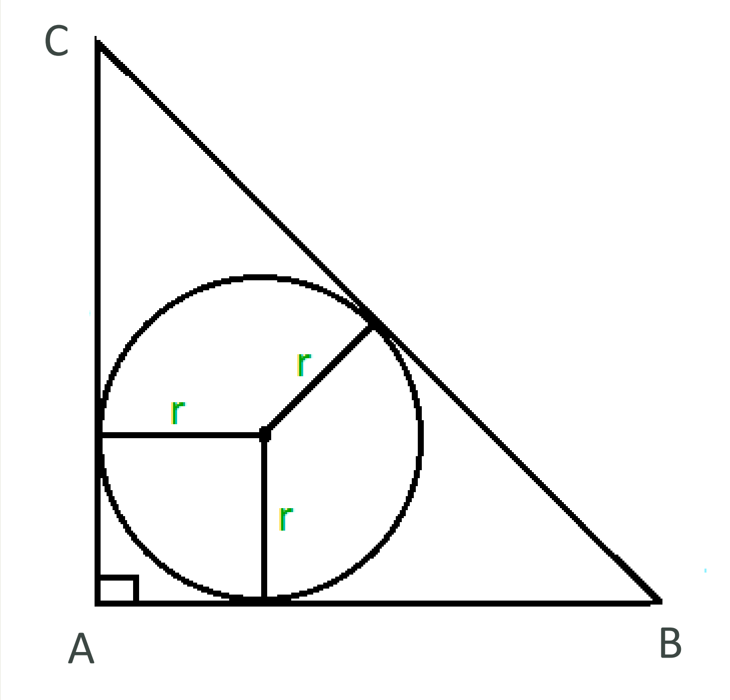
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17cm$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{8+15+17}{2}=20cm$$

Prej,

$S=r\cdot s,$ vijon

$$r=\frac{S}{s}=\frac{60}{20}=3cm$$



Syprina e trekëndëshit

Mbaj mend!

Nëse ***R*** është rreze e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshi ABC me brinjë ***a,b*** dhe ***c***, atëherë $S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$ kurse $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$

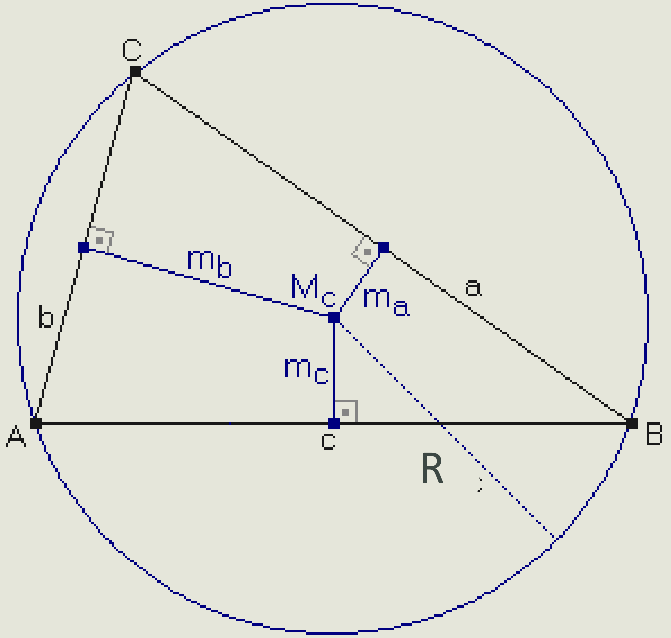
Nëse trekëndëshi është barabrinjës, atëherë $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

6. Njehso rrezen e vijës rrethore të jahtashkruar rreth trekëndëshit brinjët e të cilit janë 37 cm, 15 cm dhe 44 cm

Gjysëmperimetri i trekëndëshit $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{37+15+44}{2} = 48cm$

pra sipas formulës së Heronit

$$S = \sqrt{48(48-37)(48-15)(48-44)} = 4 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2 = 264cm^2$$



Për rrezen e vijës rrethore fitojmë

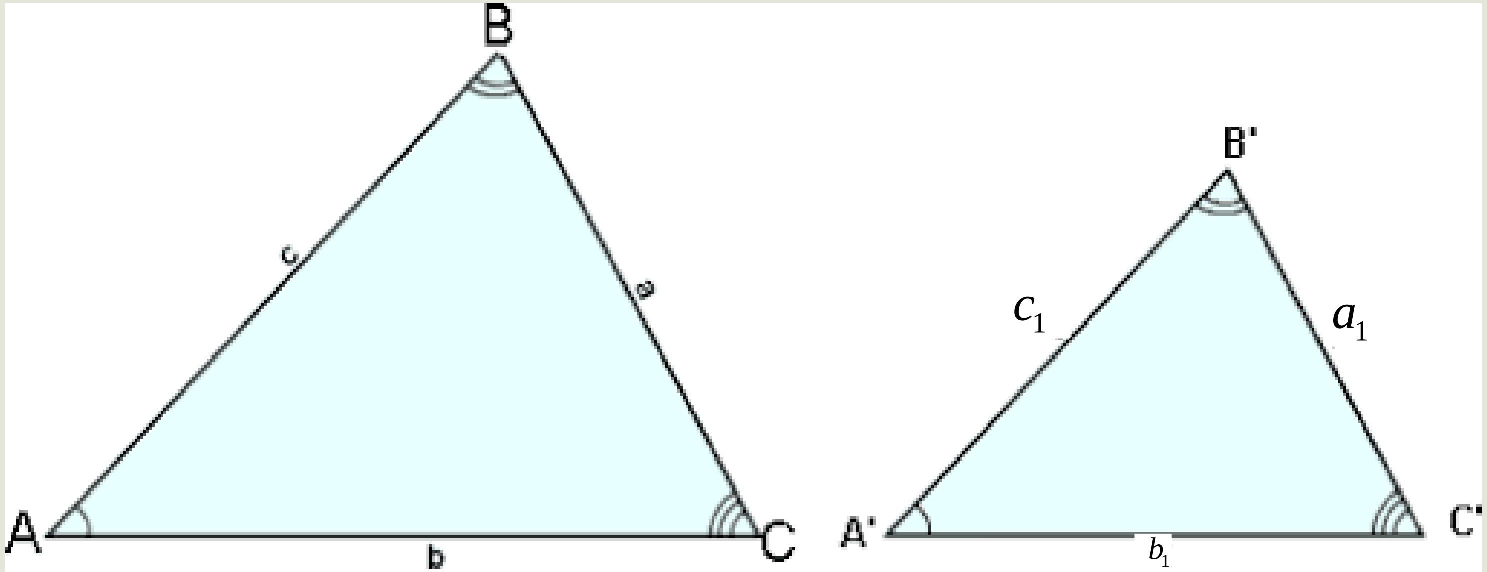
$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{37 \cdot 15 \cdot 44}{4 \cdot 264} = 23\frac{1}{8}cm$$

Syprinat e trekëndëshave të ngjajshëm

Mbaj mend!

Syprinat e trekëndëshavë të ngjajshëm qëndrojnë si katrorët e brinjëve përkatëse, d.m.th.

$$S : S_1 = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c^2 : c_1^2$$



Faleminderit!