

MATEMATIKË

The background of the slide is a green chalkboard. In the lower-left quadrant, two pieces of pink chalk are lying on the surface. The chalkboard has several faint, white, hand-drawn markings, including a large 'C' shape on the left, a curved line in the center, and an arrow-like shape at the bottom. The overall lighting is soft, creating a slight vignette effect.

Prof. Shqipe Osmani

KOMBINATORIKA

1. VARIACIONET ME PËRSËRITJE



Kujtohu!

Prodhimi (direkt) i bashkësive **A** dhe **B** është bashkësia **A**×**B** që përbëhet prej të gjithë çifteve të rregulluara **(a,b)**, ku **a**∈**A** dhe **b**∈**B**, d.m.th $A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ dhe } b \in B\}$

1 Cakto bashkësinë **A**×**B** nëse **A** = {1,2,3} dhe **B** = {3,4}.

Zgjidhje:

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$$

2 Nëse **A** = {1,2,3}, të caktohet prodhimi i dekartit **A**×**A**.
Sa elemente ka prodhimi i dekartit?

Zgjidhje:

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$\text{Numri i elementeve në } A \times A \text{ është } 9 \left(= 3 \cdot 3 = 3^2 \right)$$

Mbaj mend!

Le të jetë A bashkësi me n elemente. Cdo element prej prodhimit të dekartit $A \times A$ quhet **variacion me përsëritje prej n elementeve të klasës 2**.

- Le të jetë A bashkësi me n elemente. Sa elemente ka prodhimi direkt $A \times A$, përkatësisht sa çifte të rregulluara (a, b) ekzistojnë, nëse a dhe b janë elemente prej bashkësisë A ?

Vëre këtë që vijon:

- Elementi a mund të jetë çfarëdo element prej bashkësisë A (në A gjithësej ka n elemente).
- Nëse a e fiksojmë, elementi b mund të jetë përsëri çfarëdo element prej bashkësisë A , përkatësisht edhe b mund ta zgjedhim në n mënyra.
- Prej këtu, numri i elementeve të prodhimit direkt $A \times A$ është $n \cdot n = n^2$

Variacion me përsëritje prej n elementeve të klasës 2

- Le të jetë A bashkësi me n elemente. Sa elemente ka prodhimi direkt $A \times A$, përkatësisht sa çifte të rregulluara (a, b) ekzistojnë, nëse a dhe b janë elemente prej bashkësisë A ?

Vëre këtë që vijon:

- Elementi a mund të jetë çfarëdo element prej bashkësis A (në A gjithësej ka n elemente).
- Nëse a e fiksojmë, elementi b mundë të jetë përsëri çfarëdo element prej bashkësisë A , përkatësisht edhe b mund ta zgjedhim në n mënyra.
- Prej këtu, numri i elementeve te prodhimi direkt $A \times A$ është $n \cdot n = n^2$

Mbaj mend!

Numri i të gjithë variacioneve me përsëritje prej n elementeve të klasës 2 shënohet me \bar{V}_n^2 dhe ai është i barabartë me $\bar{V}_n^2 = n^2$

Variacion me përsëritje prej n elementeve të klasës \mathcal{Z}

- Le të jetë A bashkësia e dhënë. Prodhimi i dekartit i tre faktorëve $A \times A \times A$, të përbërë prej të gjithë tresheve të rregulluara (a_1, a_2, a_3) ku $a_1, a_2, a_3 \in A$ d.m.th $A \times A \times A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in A\}$

Mbaj mend!

Nëse A është bashkësi me n elemente, atëherë çdo element prej prodhimit të dekartit $A \times A \times A$ quhet **variacion me përsëritje prej n elementeve të klasës \mathcal{Z}** .

Numri i të gjithë variacioneve me përsëritje prej n elementeve të klasës \mathcal{Z} shënohet \bar{V}_n^3 dhe ai numër është i barabartë

$$\bar{V}_n^3 = n^3$$

3 Le të jetë $A = \{1, 2\}$. Shkruaj prodhimin e dekartit $A \times A \times A$. Sa elemente ka në këtë bashkësi?

Zgjidhje:

$$A \times A \times A = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$$

Bashkësia $A \times A \times A$ ka 8 elemente $(= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3)$

Variacion me përsëritje prej n elementeve të klasës k

- Prodhimi i dekartit $A \times A \times \dots \times A$ (A paraqitet k herë si faktorë) është bashkësi prej të gjitha n elementeve të rregulluara $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$, ku a_1, a_2, \dots, a_k janë elemente të bashkësisë A , d.mth.
$$A \times A \times \dots \times A = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in A\}$$

Mbaj mend!

Nëse A është bashkësi me n elemente, atëherë çdo element prej prodhimit të dekartit $A \times A \times \dots \times A$ (A paraqitet k herë si faktorë) quhet **variacion me përsëritje prej n elementeve të klasës k** .

Numri i të gjithë variacioneve me përsëritje prej n elementeve të klasës k shënohet \overline{V}_n^k dhe ai numër është i barabartë

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

4 Le të jetë $A = \{c, d\}$. Shkruaj prodhimin e dekartit $A \times A \times A \times A$. Sa elemente ka në këtë bashkësi?

Zgjidhje:

$$A \times A \times A \times A = \left\{ \begin{array}{l} (c, c, c, c), (c, c, c, d), (c, c, d, c), (c, c, d, d), (c, d, c, c), (c, d, c, d), \\ (c, d, d, c), (c, d, d, d), (d, c, c, c), (d, c, c, d), (d, c, d, c), (d, c, d, d), \\ (d, d, c, c), (d, d, c, d), (d, d, d, c), (d, d, d, d) \end{array} \right\}$$

Numri i elementeve $A \times A \times A \times A$ ka $16 = 2^4$. Vëre se 2 është numri i elementeve në bashkësinë A , kurse 4 është numri i paraqitjes së bashkësisë A në prodhimin e dekartit.



Vëre!

- $(1,2,3)$ dhe $(1,3,2)$ janë treshe të ndryshme të rregulluara, edhe pse ato përbëhen prej elementeve të njëjt. Prandaj, radhitja e elementeve në k është i rëndësishëm, d.m.th. radhitje të ndryshme të elementeve japin k radhitje të ndryshme.

Mbaj mend!

Radhitja (rregullimi) i elementeve në një variacioni me përsëritje prej n elementeve të klasës k është i rëndësishëm, d.m.th. me ndryshimin e radhitjes së elementeve në një variacion me përsëritje fitohet variacion tjetër.

▲ Në tekstin e më tutjeshëm variacioni me përsëritje do ta shkruajmë pa kllapa dhe presje. Kështu, variacionin (c,c,c,d) do ta shkruajmë si $cccd$

5 Sa numra mund të formohen me shifrat 1,2,3,4? Cilët janë ato?

Zgjidhje:

- Vëre se pozita e një shifre te numri me humë shifra është i rëndësishëm . Përkatësishtë, 321 dhe 213 përbëhen prej shifrave të njejta, por janë të ndryshëm.
- Cdo numër k-shifror mund të shqyrtohet si k e radhitur d.m.th. Si variacion me përsëritje prej klasës k.
- Prej këtu, numri i të gjithë numrave treshifrorë të përbërë me katër shifrat 1,2,3,4 është në realitet numri i të gjitha variacioneve me përsëritje prej 4 elementeve të klasës 3 d.m.th.

$$\overline{V}_4^3 = 4^3 = 64$$

- Ato numra janë

111	112	113	114	121	122	123	124	131	132	133	134
141	142	143	144	211	212	213	214	221	222	223	234
241	242	243	244	311	312	313	314	321	322	323	324
331	332	333	334	341	342	343	344	411	412	413	414
421	422	423	424	431	432	433	434	441	442	443	444

Detyra për punë të pavavrur

- a) Sa numra katërshifror mund të formohen prej shifrave 1,2,3,4,5,6,7,8,9?
 - b) Sa prej tyre fillojnë me shifrën 6?
 - c) Sa prej numrave katërshifror mund të formuar janë çift?
2. Janë dhënë bashkësitë $A=\{a,b,c,d\}$ dhe $B=\{1,2,3\}$. Formo prodhimin e dekartit $A \times B$.
3. Cakto e të gjithë numrave katërshifrorë çift të cilët mund të shkruhen me shifrat 1,3,4,6 dhe 7.

Faleminderit!

E-mail: shqipe.aliti@gmail.com

